8.4 각운동량 덧셈 (Addition of Angular Momenta)

이 절에서는 각운동량의 덧셈에 대해 생각해보자. 원자 내의 전자는 궤도 각운동량과 스핀 각운동량의 두 가지 각운동량을 가질 수 있다. 이 경우 이 전자가 갖는 전체 각운동량은 궤도 각운동량과 스핀 각운동량을 합한 것이 될 것이다. 마찬가지로 두 개의 전자로 이루어진 계를 생각하면 이 계의 전체 각운동량은 각 전자의 각운동량을 합한 것이 될 것이다. 이처럼 두 개의 서로 다른 각운동량을 합할 경우 결과적으로 생기는 전체 각운동량은 어떻게 주어질까? 이를 살펴보기 위하여 첫 번째 각운동량과 두 번째 각운동량을 각각 $\vec{J_1}$과 $\vec{J_2}$로 표기하고 전체 각운동량을 $\vec{J}$로 표기하겠다.

$$\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$$

즉, 전체 각운동량의 성분은 개별 각운동량 성분의 합으로 주어진다.

$$J_i = J_{1i} + J_{2i}\ , \quad i = 1,2,3\ .$$

여기서 각각의 각운동량은 앞에서 정의한 각운동량 교환관계식을 만족하며, 두 각운동량은 서로 가환이다.

$$[J_{1i},\, J_{1j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_{1k}\,, \quad [J_{2i},\, J_{2j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_{2k}\,, \quad [\vec{J_1},\, \vec{J_2}] = 0\ .$$

참고로 위의 맨 마지막 식은 성분으로 쓰면 $[J_{1i},\, J_{2j}] = 0 \ \ (i,j = 1,2,3)$ 이다. 이는 두 각운동량이 서로 영향을 주지 않고, 공통의 고유상태를 가질 수 있음을 뜻한다. 이제 공통의 고유상태를 기술하는 가환연산자 집합(complete set of commuting operators)을 생각해보자. 이를 위해서 먼저 $\vec{J}^{\,2}$를 개별 각운동량 연산자들로 표현하여 보면 다음과 같다.

$$\vec{J}^{\,2} = (\vec{J_1} + \vec{J_2})^2 = \vec{J_1}^{\,2} + \vec{J_2}^{\,2} + 2\vec{J_1}\cdot\vec{J_2}$$

그런데 $J_{1\pm} = J_{1x} \pm iJ_{1y},\ J_{2\pm} = J_{2x} \pm iJ_{2y}$ 에서 $2(J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y}) = J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+}$ 이므로, $2(\vec{J_1}\cdot\vec{J_2}) = 2(J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y} + J_{1z}J_{2z}) = J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+} + 2J_{1z}J_{2z}$ 이 되어 우리는 전체 각운동량 연산자를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\vec{J}^{\,2} = \vec{J_1}^{\,2} + \vec{J_2}^{\,2} + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+} + 2J_{1z}J_{2z}\ , \quad J_z = J_{1z} + J_{2z}$$

여기서 $[\vec{J_1}^{\,2}, J_{1i}] = 0,\ [\vec{J_2}^{\,2}, J_{2i}] = 0,\ [\vec{J_1},\, \vec{J_2}] = 0$을 적용하면 $[\vec{J}^{\,2}, \vec{J_1}^{\,2}] = 0,\ [\vec{J}^{\,2}, \vec{J_2}^{\,2}] = 0$ 과 $[J_z, \vec{J_1}^{\,2}] = 0,\ [J_z, \vec{J_2}^{\,2}] = 0$ 이 성립함을 곧 알 수 있다. 그런데 $[\vec{J}^{\,2}, J_{1z}] \neq 0,\ [\vec{J}^{\,2}, J_{2z}] \neq 0$ 이므로 주어진 세 개의 가환연산자 집합 $\{\vec{J}^{\,2},\, J_z\},\ \{\vec{J_1}^{\,2},\, J_{1z}\},\ \{\vec{J_2}^{\,2},\, J_{2z}\}$ 로부터 다음 두 개의 가환연산자 집합을 생각할 수 있다.

$$\{\vec{J_1}^{\,2}, \vec{J_2}^{\,2}, \vec{J}^{\,2},\, J_z\}\ , \quad \{\vec{J_1}^{\,2},\, \vec{J_2}^{\,2}, J_{1z}\,, J_{2z}\}$$

그러므로 우리는 이제 어떤 가환연산자 집합을 쓰느냐에 따라 두 가지 방식으로 전체 각운동량 고유상태를 표시할 수 있다. 첫 번째 가환연산자 집합을 쓰면 그 고유상태는 $|\,j_1 j_2\,; j\, m >$ 로, 두 번째 가환연산자 집합을 쓰면 그 고유상태는 $|j_1 j_2; m_1 m_2 >$ 로 표시할 수 있다. 참고로 후자는 개별 고유상태의 텐서 곱으로 쓸 수 있음을 기억하자.

$$|j_1 j_2; m_1 m_2> \equiv |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$$

이제 이 두 가지 각운동량 고유상태 표현이 서로 어떻게 연관되어 있는지 살펴보도록 하자. 통상 그렇듯이 각각의 각운동량 표현에서 고유상태들의 완전성(completeness)을 가정하면 우리는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$|j_1 j_2; m_1 m_2> = \sum_{j,m} |j_1 j_2; j\, m> < j_1 j_2; j m | j_1 j_2; m_1 m_2>$$

또는

$$|j_1 j_2; j\, m> = \sum_{m_1, m_2} |j_1 j_2; m_1 m_2>< j_1 j_2; m_1 m_2| j_1 j_2; j\, m>$$

위에서 전체 각운동량 상태를 개별 각운동량 상태로 변환할 때 나타나는 전개계수들 $< j_1 j_2; m_1 m_2| j_1 j_2; j\, m>$ 를 클렙시-고단 계수들(Clebsch-Gordan coefficients) 이라고 한다. 여기서 m 과 m_1, m_2 사이의 관계는 쉽게 알 수 있는데, 이를 위해 처음 식의 양변에 전체 각운동량의 z 성분 연산자 J_z 를 적용하여 보자. 먼저 우변에서 특정한 m 값을 갖는 상태에 J_z 를 적용하면 다음을 얻는다.

$$J_z | j_1 j_2; j\, m> = m\hbar | j_1 j_2; j\, m>$$

다음으로 좌변에 $J_z = J_{1z} + J_{2z}$ 를 적용하면 다음과 같이 된다.

$$(J_{1z} + J_{2z}) | j_1 j_2; j\, m> = J_{1z} \otimes I\, |j_1 m_1> \otimes |j_2 m_2> + I \otimes J_{2z} |j_1 m_1> \otimes |j_2 m_2>$$

$$= m_1 \hbar |j_1 m_1> \otimes | j_2 m_2> + m_2 \hbar |j_1 m_1> \otimes |j_2 m_2> = (m_1 + m_2)\hbar\, | j_1 j_2; j\, m>$$

여기서 I 는 단위연산자(identity operator)를 표시하며, 단위연산자는 주어진 상태를 변화시키지 않는다. 이는 숫자 1을 어떤 수에 곱하거나 단위행렬을 어떤 행렬에 곱해도 아무런 변화가 없는 것과 같다. 또한 개별 성분들의 합을 텐서 곱의 합으로 표현한 것은 J_{1z} 는 상태 1 즉 $|j_1 m_1>$ 에만, J_{2z} 는 상태 2 즉 $|j_2 m_2>$ 에만 작용한다는 점을 강조하기 위해서이다. 이는 곧 J_{1z}, J_{2z} 가 서로 가환임을 의미한다. 위 결과에서 좌변의 m_1, m_2 는 주어진 어떤 상수이므로 우변의 m 값도 고정되게 되고 항상 $m = m_1 + m_2$ 를 만족한다.
그러므로 위 식들은 다음과 같이 다시 써야 한다.

$$|j_1 j_2; m_1 m_2> = \sum_{\substack{j \\ (m = m_1 + m_2)}} | j_1 j_2; j\, m> < j_1 j_2; j m | j_1 j_2; m_1 m_2>$$

또는

$$| j_1 j_2; j\, m> = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ (m_1 + m_2 = m)}} |j_1 j_2; m_1 m_2>< j_1 j_2; m_1 m_2| j_1 j_2; j\, m>$$

이제 전체 각운동량 연산자 $\vec{J}^{\,2}$ 의 양자수 j 에 대해서 알아보도록 하자. 앞 절에서 우리는 개별 각운동량 양자수 j_1, j_2 가 각각 m_1, m_2 의 최대값에 해당함을 보았다. 마찬가지로 모든 j 는 역시 각각의 경우에 m 이 가질 수 있는 최대값에 해당한다. 그러므로 m 이 가질

수 있는 최대값은 곧 j의 최대값이 된다. 이로부터 우리는 $m_{\max} = m_{1\max} + m_{2\max}$ 의 관계에서 j가 가질 수 있는 최대값은 $j_1 + j_2$ 임을 알 수 있다. 즉, $j_{\max} = j_1 + j_2$ 이다. 이제 j가 가질 수 있는 최소값을 알기 위하여 다음을 생각하여 보도록 하자. 먼저 주어진 j_1, j_2 값들을 갖는 존재 가능한 상태의 개수는 $(2j_1+1)(2j_2+1)$ 이므로 j의 최대값으로부터 j의 최소값까지 각 양자수 j를 갖는 존재 가능한 상태의 개수의 합은 이 값과 같아야 한다. 즉, 다음의 관계가 만족되어야 한다.

$$(2j_1+1)(2j_2+1) = \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} (2j+1)$$

이를 만족하는 j의 최소값이 $j_{\min} = |j_1 - j_2|$ 임은 다음과 같이 볼 수 있다. 간단히 하기 위하여 $j_1 \geq j_2$ 임을 가정하자. 그러면 $j_{\min} = j_1 - j_2$ 로 주어지므로 위 식의 우변의 합은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{2j_2} \{2(j_1 - j_2 + n) + 1\} &= (2j_1 - 2j_2 + 1)(2j_2 + 1) + \sum_{n=0}^{2j_2} 2n \\ &= (2j_1 - 2j_2 + 1)(2j_2 + 1) + 2j_2(2j_2 + 1) \\ &= (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)\end{aligned}$$

그러므로 개별 각운동량 양자수 j_1, j_2 로부터 전체 각운동량 양자수 j가 가질 수 있는 값들은 다음과 같다.

$$j = j_1 + j_2,\ j_1 + j_2 - 1,\ \cdots,\ |j_1 - j_2| - 1,\ |j_1 - j_2|$$

여기서 각각의 j 값에 대하여 m이 가질 수 있는 범위는 $m = \{j, j-1, \cdots, -j\}$ 즉 $-j \leq m \leq j$ 이므로, 개별 각운동량 양자수 j_1, j_2 를 갖는 두 개의 각운동량을 합하면 전체 각운동량 양자수 j 와 m 은 다음의 조건을 만족함을 기억하자.

각각 양자수 j_1 과 j_2 를 갖는 두 각운동량을 합하였을 때 합해진 전체 각운동량의 양자수 j가 가질 수 있는 값의 범위는 $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ 이고, 이때 가능한 각각의 j에 대하여 양자수 m은 $-j \leq m \leq j$ 의 범위를 갖는다.

이제 이러한 지식을 바탕으로 몇몇 간단한 경우에 클렙시-고단 계수들을 구해보도록 하겠다. 가장 간단한 경우는 궤도 각운동량을 갖지 않고 스핀 각운동량만을 갖는 두 개의 전자들로 이루어진 계를 생각하여 보자. 이 경우, 전자의 스핀은 $\frac{1}{2}$ 이므로 위의 결과에 의하면 $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ 이 되어 전체 각운동량은 $j_{\max} = j_1 + j_2 = 1$과 $j_{\min} = j_1 - j_2 = 0$ 사이의 값을 갖게 된다. 즉 전체 각운동량은 $j = 0, 1$ 의 두 값만을 갖는다. 스핀 각운동량의 경우 통상 $\vec{J}$ 대신 $\vec{S}$ 로 표시하므로 우리는 합한 전체 각운동량을 $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$,

$S_z = S_{1z} + S_{2z}$ 로 표기하고, 각각의 양자수는 (j, m) 대신 (s, m)을 사용하겠다. 여기서 $s = 1$ 인 경우는 $m = 1, 0, -1$ 의 세 값을 가지므로 이를 스핀 삼중항(triplet)이라고 하고, $s = 0$ 인 경우는 $m = 0$ 만 가능하므로 이를 스핀 단일항(singlet)이라고 한다. 이는 계 전체의 스핀을 표현하므로 앞의 분석에 따라 우리는 이를 개별 전자들의 스핀 상태로 표시할 수 있다.

$$|s_1 s_2 ; s\, m> \; = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ (m_1 + m_2 = m)}} |s_1\, s_2 ; m_1 m_2 > \, < s_1\, s_2 ; m_1 m_2 | s_1 s_2 ; s\, m>$$

이는 삼중항의 경우는

$$\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2} ; s=1, m> \; = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ (m_1 + m_2 = m)}} \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2} ; m_1\, m_2 > \, < \frac{1}{2}\, \frac{1}{2} ; m_1 m_2 \right| \frac{1}{2}\, \frac{1}{2} ; s=1, m>$$

로 쓸 수 있는데, m_1, m_2 는 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 만 가능하므로 $m = 1$ 일 때는 $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$ 가 되어야 하고, $m = -1$ 일 때는 $m_1 = m_2 = -\frac{1}{2}$ 가 되어야 한다. $m = 0$ 일 때는 m_1, m_2 의 부호가 반대일 경우만 가능하므로 $m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}$ 과 $m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2}$ 가 되어야 한다. 여기서 $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$ 인 경우는 두 전자의 스핀이 모두 $+z$ 방향을 향하므로 우리는 $|\uparrow \uparrow >$ 로 표시하고, $m_1 = m_2 = -\frac{1}{2}$ 의 경우는 두 전자의 스핀이 모두 $-z$ 방향을 향하므로 $|\downarrow \downarrow >$ 로 표시하겠다. 마찬가지로 $m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}$ 의 경우는 $|\uparrow \downarrow >$ 로 $m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2}$ 의 경우는 $|\downarrow \uparrow >$ 로 표시하겠다.

그러므로 삼중항의 경우 $m = 1$ 과 $m = -1$ 인 상태는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\left|\frac{1}{2}\;\frac{1}{2} ; s=1, m=1> \; = \right|\frac{1}{2}\;\frac{1}{2} ; m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2}> \; \equiv \; |\uparrow \uparrow >$$

$$\left|\frac{1}{2}\;\frac{1}{2} ; s=1, m=-1> \; = \right|\frac{1}{2}\;\frac{1}{2} ; m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}> \; \equiv \; |\downarrow \downarrow >$$

그러나 $m = 0$ 인 경우는 $|\uparrow \downarrow >$ 와 $|\downarrow \uparrow >$ 의 두 상태가 모두 가능하므로 전개계수 a, b 를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left|\frac{1}{2}\;\frac{1}{2} ; s=1, m=0> \; = \; a\, |\uparrow \downarrow > + b\, |\downarrow \uparrow >\right.$$

이때 전개계수 a, b 가 우리가 앞에서 언급한 클렙시-고단 계수들이다. 이제 이 계수들을 구하는 방법을 생각해 보자. 1절에서 우리는 올림과 내림연산자가 다음과 같이 작용하는 것을 보았다.

$$J_{\pm}\,\phi_{j,m} = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}\ \phi_{j,m\pm 1}\,.$$

내림연산자 J_-를 우리의 경우에 적용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S_-\left|\,\frac{1}{2}\ \frac{1}{2};s=1,m=1>\ =(S_{1-}+S_{2-})\ |\uparrow\ \uparrow\ >\right.$$

여기서 $\left|s_1=\frac{1}{2}\,,s_2=\frac{1}{2}\,;s\ m>\right.$ 의 s_1, s_2는 항상 $\frac{1}{2}$로 고정되어 있으므로 위에서 우리는 간편함을 위하여 s_1, s_2를 생략하였으며, 앞으로도 그렇게 표시하겠다.

한편, $|\uparrow\ \uparrow\ >\ \equiv\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\,;m_1=\frac{1}{2}\,,m_2=\frac{1}{2}>\right.$ 이고, 내림연산자 공식에서

$S_{1-}\left|s_1=\frac{1}{2}\ m_1=\frac{1}{2}>\ =\hbar\ \right|s_1=\frac{1}{2}\ m_1=-\frac{1}{2}>$ 즉 $S_{1-}|\uparrow\ \uparrow\ >\ =\hbar\,|\downarrow\ \uparrow\ >$이 되고 마찬가지로 $S_{2-}|\uparrow\ \uparrow\ >\ =\hbar\,|\uparrow\ \downarrow\ >$이 되므로 우리는 다음의 관계식을 얻는다.

$$S_-|\uparrow\ \uparrow\ >=\hbar\,(\ |\downarrow\ \uparrow\ >+|\uparrow\ \downarrow\ >\ )$$

그런데 내림연산자 공식을 다시 전체 각운동량 상태표현에 적용하면,

$S_-\left|\,\frac{1}{2}\ \frac{1}{2};s=1,m=1>\ =\sqrt{2}\,\hbar\right|\,\frac{1}{2}\ \frac{1}{2};s=1,m=0>$ 을 얻게 되어

$S_-|\uparrow\ \uparrow\ >=\hbar\,(\ |\downarrow\ \uparrow\ >+|\uparrow\ \downarrow\ >\ )\ =\sqrt{2}\,\hbar\left|\,\frac{1}{2}\ \frac{1}{2};s=1,m=0>\right.$ 이 된다.

즉, $\left|\,\frac{1}{2}\ \frac{1}{2};s=1,m=0>\ =\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\ |\downarrow\ \uparrow\ >+|\uparrow\ \downarrow\ >\ )\right.$ 이 된다.

그러므로 이 경우 클렙시-고단 계수 a,b는 $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 로 주어진다.

단일항의 경우는 $s=0$, $m=0$의 값을 가지므로 삼중항에서 $m=0$의 경우와 마찬가지로 m_1, m_2의 부호가 반대가 되어야 한다. 즉, $|\uparrow\ \downarrow\ >$ 와 $|\downarrow\ \uparrow\ >$ 의 두 상태가 가능하다. 그러므로 전개계수 c,d를 써서 삼중항의 경우처럼 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\left|\,\frac{1}{2}\ \frac{1}{2};s=0,m=0>\ =\ \ c\ |\uparrow\ \downarrow\ >+d\ |\downarrow\ \uparrow\ >\right.$$

그런데 단일항과 삼중항의 상태들은 서로 독립적이므로 내적하면 영이 되어야 한다. 즉,

$<\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,;s=0,m=0\left|\,\frac{1}{2}\ \frac{1}{2};s=1,m=0>\ =0\right.$ 이 만족되어야 한다. 그런데

$$<\uparrow\downarrow\ |\uparrow\ \downarrow\ >\ =<\downarrow\ \uparrow|\downarrow\ \uparrow\ >=1,\ \ <\uparrow\ \downarrow|\downarrow\ \uparrow\ >=<\downarrow\ \uparrow|\uparrow\ \downarrow\ >=0$$

이므로 이 경우 클렙시-고단 계수는 $c=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $d=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이 되면 된다. 즉, 단일항

은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,;s=0,m=0\right> \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,|\uparrow\downarrow> - |\downarrow\uparrow>\,)$$

이제 이 단일항 상태의 양자수가 실제 $s=0$에 해당하는지 살펴보기로 하겠다.
앞에서 얻은 $\overrightarrow{J}^{\,2}=\overrightarrow{J_1}^{\,2}+\overrightarrow{J_2}^{\,2}+J_{1+}J_{2-}+J_{1-}J_{2+}+2J_{1z}J_{2z}$ 을 이 경우에 적용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\overrightarrow{S}^2=\overrightarrow{S_1}^{\,2}+\overrightarrow{S_2}^{\,2}+S_{1+}S_{2-}+S_{1-}S_{2+}+2S_{1z}S_{2z}$$

이제 이 연산자를 단일항 상태 $\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,;s=0,m=0\right>$ 에 적용하면 다음이 된다.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{S}^2\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,;s=0,m=0\right> \\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{S_1}^{\,2}+\overrightarrow{S_2}^{\,2}+2S_{1z}S_{2z}+S_{1+}S_{2-}+S_{1-}S_{2+})\,\{|\uparrow\downarrow>-|\downarrow\uparrow>\} \\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\hbar^2\frac{3}{4}|\uparrow\downarrow> +\hbar^2\frac{3}{4}|\uparrow\downarrow> -\hbar^2\frac{1}{2}|\uparrow\downarrow> +\hbar^2|\downarrow\uparrow>\right. \\
&\qquad\left. -\hbar^2\frac{3}{4}|\downarrow\uparrow> -\hbar^2\frac{3}{4}|\downarrow\uparrow> +\hbar^2\frac{1}{2}|\downarrow\uparrow> -\hbar^2|\uparrow\downarrow>)\right\}
\end{aligned}$$

이 되어 $s=0$ 임을 보여준다. 참고로 위에서 우리는 다음 관계를 사용하였다.

$$\overrightarrow{S_1}^{\,2}|\uparrow\downarrow> = \overrightarrow{S_2}^{\,2}|\uparrow\downarrow> = \frac{3}{4}\hbar^2|\uparrow\downarrow>\ ,$$

$$\overrightarrow{S_1}^{\,2}|\downarrow\uparrow> = \overrightarrow{S_2}^{\,2}|\downarrow\uparrow> = \frac{3}{4}\hbar^2|\downarrow\uparrow>\ ,$$

$$2S_{1z}S_{2z}|\uparrow\downarrow> = -\frac{\hbar^2}{2}|\uparrow\downarrow>\ ,\qquad 2S_{1z}S_{2z}|\downarrow\uparrow> = -\frac{\hbar^2}{2}|\downarrow\uparrow>\ ,$$

$$S_{1+}S_{2-}|\uparrow\downarrow> = 0\ ,\qquad S_{1-}S_{2+}|\downarrow\uparrow> = 0\ ,$$

$$S_{1+}S_{2-}|\downarrow\uparrow> = \hbar^2|\uparrow\downarrow>\ ,\qquad S_{1-}S_{2+}|\uparrow\downarrow> = \hbar^2|\downarrow\uparrow>$$

이제 각운동량의 덧셈 중에서 스핀 1/2 더하기 스핀 1/2 보다는 조금 더 복잡하지만, 우리가 일반적으로 구할 수 있는 가장 간단한 각운동량 덧셈, $j_1 \geq \frac{1}{2}$ 과 $j_2=\frac{1}{2}$ 인 경우에 대하여 생각하여 보겠다. 앞에서 얻은 전체 각운동량이 가질 수 있는 범위 $j_{\max}=j_1+j_2$ 과 $j_{\min}=|j_1-j_2|$ 으로부터 이 경우 전체 각운동량이 가질 수 있는 값은 $j_1+\frac{1}{2}$ 과 $j_1-\frac{1}{2}$ 의 두 가지라는 점을 알 수 있다. 이제 앞에서 구한 스핀 1/2 더하기 스핀 1/2의 경우에서와 같이 이 두 상태들의 클렙시-고단 계수들을 구하여 보도록 하겠다. 표현의 편의를 위하여 $(j_2,m_2)=(s,m_s)$ 로 표시하고 합해진 각운동량 양자수를 $(j\,,m_j)$로 표시하겠

다. 여기서 $s=\frac{1}{2}$, $m_s=\pm\frac{1}{2}$ 의 값들만 가짐을 기억하자.

이제 합해진 각운동량 상태는 다음과 같이 표시하고,

$$\left| j_1, s=\frac{1}{2}; j\ m_j > \ = \sum_{\substack{m_1, m_s \\ (m_j=m_1+m_s)}} \right| j_1\ s\ ;\ m_1 m_s > < j_1\ s\ ; m_1 m_s |\ j_1\ , s=\frac{1}{2}; j\ m_j > \ ,$$

$m_j = m+\frac{1}{2}$ 인 경우를 생각하자. 클렙시-고단 계수들을 다음과 같이 α , β 로 표시하고

$$< j_1, s=\frac{1}{2}; m_1=m, m_s=\frac{1}{2} \Big| j_1, s=\frac{1}{2}; j, m_j = m+\frac{1}{2} > = \alpha\ ,$$

$$< j_1, s=\frac{1}{2}; m_1=m+1, m_s=-\frac{1}{2} \Big| j_1, s=\frac{1}{2}; j, m_j = m+\frac{1}{2} > = \beta\ ,$$

이때 j_1 과 $j_2=s=\frac{1}{2}$ 은 변하지 않으므로 생략하여 $|j_1\, j_2; m_1 m_2> \ \equiv\ |\, m_1, m_2>$ 과 $|j_1\, j_2; j\, m> \ \equiv\ |\, j, m>$ 등으로 표시하면 위에서 주어진 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Big| j, m_j = m+\frac{1}{2} > \ = \ \alpha \Big|\ m_1=m,\ m_s=\frac{1}{2}> + \beta \Big| m_1 = m+1,\ m_s=-\frac{1}{2}>$$

여기서 개별 각운동량으로 표현된 상태들은 다음과 같이 각운동량2의 스핀 상태들 (χ_+ , χ_-)로 표기될 수 있음을 기억하자.

$$\Big| j_1\ , s=\frac{1}{2}; m_1=m,\ m_s=\frac{1}{2}> \ \equiv |j_1\ , m> \otimes \chi_+ \ ,$$

$$\Big| j_1, s=\frac{1}{2}; m_1=m+1,\ m_s=-\frac{1}{2}> \ \equiv |j_1\ , m+1> \otimes \chi_- \ .$$

이제 $\vec{J}^{\,2} = (\vec{J_1}+\vec{S}\,)^2 = \vec{J_1}^{\,2} + \vec{S}^{\,2} + 2\,\vec{J_1}\bullet\vec{S}$ 의 관계를 전체 각운동량 상태에 적용해 보자.

$$\vec{J}^{\,2}\Big| j, m_j = m+\frac{1}{2}>$$

$$= (\vec{J_1}^{\,2} + \vec{S}^{\,2} + 2\,\vec{J_1}\bullet\ \vec{S}) \Big|\, j\ ,\ m_j = m+\frac{1}{2}>$$

$$= (\ \vec{J_1}^{\,2} + \vec{S}^2 + 2J_{1z}S_z + J_{1+}S_- + J_{1-}S_+) \{\ \alpha\ |j_1\ , m> \otimes \chi_+ \ + \beta\, |j_1\ , m+1> \otimes \chi_- \}$$

여기서 $\vec{J_1}^{\,2}|j_1, m> = j_1(j_1+1)\hbar^2 |j_1, m>$, $J_{1z}|j_1, m> = m\hbar |j_1, m>$ 그리고 $J_{1\pm}|j_1, m> \ = \ \sqrt{j_1(j_1+1)-m(m\pm1)}\ \hbar\, |j_1, m\pm1>$, $S_+\chi_- = \hbar\chi_+$, $S_-\chi_+ = \hbar\chi_-$ 의 관계를 사용하고,

$S_+\chi_+ = 0$, $S_-\chi_- = 0$, $S_z\chi_\pm = \pm\frac{1}{2}\hbar\,\chi_\pm$, $\vec{S}^{\,2}\chi_\pm = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_\pm$ 의 관계로부터 다음의 결과를 얻는다.

$$(\vec{J_1}^{\,2} + \vec{S}^2 + 2J_{1z}S_z + J_{1+}S_- + J_{1-}S_+)\,|j_1, m> \otimes\chi_+$$

$$= \left\{ j_1(j_1+1) + \frac{3}{4} + 2\times m \times \frac{1}{2} \right\} \hbar^2\, |j_1, m> \otimes\chi_+$$

$$+ \sqrt{j_1(j_1+1) - m(m+1)}\,\hbar^2\,|j_1, m+1> \otimes\chi_- \;.$$

마찬가지로,

$$(\vec{J_1}^{\,2} + \vec{S}^2 + 2J_{1z}S_z + J_{1+}S_- + J_{1-}S_+)\,|j_1, m+1> \otimes\chi_-$$

$$= \left\{ j_1(j_1+1) + \frac{3}{4} + 2\times(m+1)\times(-\frac{1}{2}) \right\} \hbar^2\, |j_1, m+1> \otimes\chi_-$$

$$+ \sqrt{j_1(j_1+1) - (m+1)m}\,\hbar^2\,|j_1, m> \otimes\chi_+$$

를 얻는다.

한편, $\vec{J}^{\,2}\left|j, m_j = m + \frac{1}{2}\right> = j(j+1)\hbar^2\left|j, m_j = m+\frac{1}{2}\right>$

의 관계를 만족하므로 우리는 다음의 관계식을 얻는다.

$$j(j+1)\hbar^2\{\,\alpha\,|j_1, m> \otimes\chi_+ \;+ \beta\,|j_1, m+1> \otimes\chi_-\,\}$$
$$= \left[\left\{ j(j_1+1) + \frac{3}{4} + m \right\}\alpha + \sqrt{j_1(j_1+1) - m(m+1)}\,\beta \right] \hbar^2\,|j_1, m> \otimes\chi_+$$

$$+ \left[\left\{ j(j_1+1) + \frac{3}{4} - (m+1) \right\}\beta + \sqrt{j_1(j_1+1) - m(m+1)}\,\alpha \right] \hbar^2\,|j_1, m+1> \otimes\chi_-$$

여기서 $|j_1, m> \otimes\chi_+$ 과 $|j_1, m+1> \otimes\chi_-$ 은 서로 독립이므로 다음 관계가 성립해야 한다.

$$j(j+1)\alpha = \left\{ j_1(j_1+1) + \frac{3}{4} + m \right\}\alpha + \sqrt{j_1(j_1+1) - m(m+1)}\,\beta \;,$$

$$j(j+1)\beta = \left\{ j_1(j_1+1) + \frac{3}{4} - m - 1 \right\}\beta + \sqrt{j_1(j_1+1) - m(m+1)}\,\alpha$$

정리하면,

$$\left\{j(j+1)-j_1(j_1+1)-\frac{3}{4}-m\right\}\alpha=\sqrt{j_1(j_1+1)-m(m+1)}\,\beta\ ,$$

$$\left\{j(j+1)-j_1(j_1+1)-\frac{3}{4}+m+1\right\}\beta=\sqrt{j_1(j_1+1)-m(m+1)}\,\alpha$$

이 되는데 두 식을 곱해주면 다음의 관계를 얻는다.

$$\left\{j(j+1)-j_1(j_1+1)-\frac{3}{4}-m\right\}\times\left\{j(j+1)-j_1(j_1+1)-\frac{3}{4}+m+1\right\}=j_1(j_1+1)-m(m+1)$$

그런데 $j_1(j_1+1)-m(m+1)=(j_1-m)(j_1+m+1)$으로 쓸 수 있으므로 좌우변이 같아지려면 $j(j+1)-j_1(j_1+1)-\frac{3}{4}$ 이 j_1 혹은 $-j_1-1$이 되면 된다.

즉, $j(j+1)-j_1(j_1+1)-\frac{3}{4}=j_1$ 인 경우, $j=j_1+\frac{1}{2}$ 이 되고,

$j(j+1)-j_1(j_1+1)-\frac{3}{4}=-j_1-1$ 인 경우, $j=j_1-\frac{1}{2}$ 이 된다.

이제 각각의 경우에 클렙시 고단 계수 α와 β를 구해보자.

$j=j_1+\frac{1}{2}$ 인 경우, α와 β는 다음 관계식을 만족한다.

$(j_1-m)\alpha=\sqrt{(j_1-m)(j_1+m+1)}\,\beta$

즉, $\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{\frac{j_1+m+1}{j_1-m}}$ 의 관계를 만족하여야 한다. 그런데 규격화 조건식

$<j,m_j=m+\frac{1}{2}\left|j,m_j=m+\frac{1}{2}\right>=1$ 에서 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ 을 만족하여야 하므로 우리는 클렙시-고단 계수로 $\alpha=\sqrt{\frac{j_1+m+1}{2j_1+1}}$, $\beta=\sqrt{\frac{j_1-m}{2j_1+1}}$ 을 얻는다.

즉,

$$\left|j=j_1+\frac{1}{2},m_j=m+\frac{1}{2}\right>=\sqrt{\frac{j_1+m+1}{2j_1+1}}\,|j_1,m>\otimes\chi_+ +\sqrt{\frac{j_1-m}{2j_1+1}}\,|j_1,m+1>\otimes\chi_-\ .$$

$j=j_1-\frac{1}{2}$ 인 경우, α와 β는 다음 관계식을 만족하므로,

$-(j_1+m+1)\alpha=\sqrt{(j_1-m)(j_1+m+1)}\,\beta$, 즉 $\frac{\alpha}{\beta}=-\sqrt{\frac{j_1-m}{j_1+m+1}}$ 이 되는데

이 관계를 만족하는 α와 β의 상대적인 부호는 결정되지 않는데, 통상 상대적 부호는 다음의 클렙시-고단 계수 $<m_1,m_2|j,m>=<j_1,j-j_1|j,j>$ 가 양수가 되게 정한다.

이관례에 따르면 $\beta=<m_1=m+1,m_s=-\frac{1}{2}\left|j,m_j=m+\frac{1}{2}\right>$ 가 J_-를 통하

여 $< j_1, j-j_1 | j, j >$ 과 연결되므로 β가 양의 부호를 가져야 한다. 그러므로 α와 β는 다음과 같이 주어진다. $\alpha = -\sqrt{\frac{j_1-m}{2j_1+1}}$, $\beta = \sqrt{\frac{j_1+m+1}{2j_1+1}}$

$$\left| j = j_1 - \frac{1}{2}, m_j = m + \frac{1}{2} \right> = -\sqrt{\frac{j_1-m}{2j_1+1}}\ |j_1, m> \otimes \chi_+ + \sqrt{\frac{j_1+m+1}{2j_1+1}}\ |j_1, m+1> \otimes \chi_- \ .$$

위의 결과를 $j_1 = \frac{1}{2}$ 의 경우에 적용하면 우리는 앞서 얻은 스핀$\frac{1}{2}$ 더하기 스핀$\frac{1}{2}$에서 $m_j = 0$ 인 경우에 삼중항과 단일항의 결합계수들을 얻을 수 있다. 먼저 삼중항의 경우 $m_j = m + \frac{1}{2} = 0$ 이 되려면 $m = -\frac{1}{2}$ 이 되어야 하므로

$$\left| j = j_1 + \frac{1}{2}, m_j = m + \frac{1}{2} \right> = \sqrt{\frac{j_1+m+1}{2j_1+1}}\ |j_1, m> \otimes \chi_+ + \sqrt{\frac{j_1-m}{2j_1+1}}\ |j_1, m+1> \otimes \chi_-$$

에 $j_1 = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면 다음의 결과를 얻는다.

$$|j = 1, m_j = 0> = \sqrt{\frac{1}{2}}\ \chi_{1-} \otimes \chi_{2+} + \sqrt{\frac{1}{2}}\ \chi_{1+} \otimes \chi_{2-} = \sqrt{\frac{1}{2}}\ (\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow)\ .$$

다음으로 단일항의 경우,

$$\left| j = j_1 - \frac{1}{2}, m_j = m + \frac{1}{2} \right> = -\sqrt{\frac{j_1-m}{2j_1+1}}\ |j_1, m> \otimes \chi_+ + \sqrt{\frac{j_1+m+1}{2j_1+1}}\ |j_1, m+1> \otimes \chi_-$$

에 $j_1 = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면 다음의 결과를 얻는다.

$$|j = 0, m_j = 0> = -\sqrt{\frac{1}{2}}\ \chi_{1-} \otimes \chi_{2+} + \sqrt{\frac{1}{2}}\ \chi_{1+} \otimes \chi_{2-} = \sqrt{\frac{1}{2}}\ (-\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow)\ .$$

이는 우리가 앞에서 얻은 단일항의 표현과 같다:

$$\left| s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = \frac{1}{2}; s = 0, m = 0 \right> = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow).$$

각운동량1이 궤도 각운동량인 경우 $|j_1 = l, m> = Y_l^m$ 으로 주어지므로 우리는 다음 관계식을 얻는다.

$$\left| l, \frac{1}{2}; j = l + \frac{1}{2}, m_j = m + \frac{1}{2} \right> = \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}\ Y_l^m \chi_+ + \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}\ Y_l^{m+1} \chi_- \ ,$$

$$\left| l, \frac{1}{2}; j = l - \frac{1}{2}, m_j = m + \frac{1}{2} \right> = -\sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}\ Y_l^m \chi_+ + \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}\ Y_l^{m+1} \chi_- \ .$$

동일한 방법으로 $m_j = m - \frac{1}{2}$ 인 경우에도 클렙시-고단 계수들을 구할 수 있는데 그 결과는 다음과 같다.

$$\left| j = j_1 + \frac{1}{2}, m_j = m - \frac{1}{2} \right> = \sqrt{\frac{j_1 + m}{2j_1 + 1}} \, |j_1, m-1> \otimes \chi_+ \; + \sqrt{\frac{j_1 - m + 1}{2j_1 + 1}} \, |j_1, m> \otimes \chi_- \, ,$$

$$\left| j = j_1 - \frac{1}{2}, m_j = m - \frac{1}{2} \right> = -\sqrt{\frac{j_1 - m + 1}{2j_1 + 1}} \, |j_1, m-1> \otimes \chi_+ \; + \sqrt{\frac{j_1 + m}{2j_1 + 1}} \, |j_1, m> \otimes \chi_- \, .$$

참고로 이 결과는 앞에서 얻은 $m_j = m + \frac{1}{2}$ 경우의 두 결과식에 $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ 를 각각 한번 적용하여서도 얻어지고, 또는 앞에서 얻은 두 식에 단순히 m 대신 $m-1$을 대입하여서도 얻을 수 있는데, 이는 여기서 m 값이 정해진 어떤 값이 아닌 그 절대값이 j 보다 크지 않은 범주에 있는 모든 임의의 m 값이면 되기 때문이다.

► 일반적인 경우에 있어서 클렙시-고단 계수들의 계산 ◄

위에서 우리는 j_1, j_2 중에서 하나가 $1/2$ 인 경우의 각운동량 덧셈에 대해 알아보았다. 두 양자수 j_i 가 모두 $1/2$ 보다 큰 경우는 위에서 구한 방법을 적용하기 어려우므로 일반적인 계산법을 강구하여야 한다. 우리는 이제 이와 같은 일반적인 경우의 각운동량 덧셈의 경우에 클렙시-고단 계수들을 구하는 방법에 대해 살펴보기로 하겠다.

먼저 주목할 점은 특정한 경우의 클렙시-고단 계수들은 상대적인 부호에 대한 적절한 규칙을 주면 미리 알 수 있다는 것이다.

예컨대, 클렙시-고단 계수 $< m_1 m_2 | j \, m_j >$가 $< m_1 = j_1, m_2 = j - j_1 | j, m = j >$인 경우는 앞에서 정한 규칙에 따라 그 부호가 양이 되어야 하고, 특히 $j = j_1 + j_2$ 인 경우는 그 값이 1이 되어야 한다. 즉 $< m_1 = j_1, m_2 = j_2 | j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2 > = 1$ 이 된다. 이는 $| j_1 j_2 ; j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2 > \; = \; |j_1, m_1 = j_1 > \otimes |j_2, m_2 = j_2 >$ 의 관계와 $|j_1, m_1 = j_1 > \otimes |j_2, m_2 = j_2 > \; \equiv \; |j_1 j_2 ; m_1 = j_1, m_2 = j_2 >$ 의 관계에 클렙시-고단 계수의 정의를 사용하면 바로 알 수 있다. 그러나 j 값이 $j < j_1 + j_2$ 인 경우에는 이처럼 바로 알 수가 없다. 하지만 $j < j_1 + j_2$ 인 경우의 클렙시-고단 계수들도 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

1) 내림연산자 $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ 를 $| \, j = j_{\max} = j_1 + j_2 \, , m = j_{\max} >$ 상태와 이의 개별 표현에 작용시켜 $j = j_{\max}$ 인 경우의 모든 $m < j_1 + j_2$ 값에 대한 클렙시-고단 계수들을 구한다.

2) 다음 $|j = j_1 + j_2 - 1, m = j_1 + j_2 - 1 >$ 상태는 1)에서 $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ 를 한번

작용시켜 클렙시-고단 계수들을 구한 $|\, j=j_{\max}, m=j_{\max}-1>$ 상태와 직교하므로 이 조건과 규격화 조건의 두 식으로부터 클렙시-고단의 두 미지계수들(2 unknown coefficients)을 구한다.

3) 이때, $j=j_{\max}-1$ 인 경우의 모든 $m<j_{\max}-1$ 경우에 대한 클렙시-고단 계수들은 $J_{-}=J_{1-}+J_{2-}$ 를 작용시켜 1)단계에서와 동일한 방법으로 구한다.

4) 다음 단계로 $j=j_{\max}-2$ 인 경우에는 $|j=j_{\max}-2, m=j_{\max}-2>$ 인 상태가 1)단계와 3)단계에서 구한 $|j=j_{\max}, m=j_{\max}-2>$ 상태와 $|j=j_{\max}-1, m=j_{\max}-2>$ 상태에 모두 직교하므로 이 두 직교 조건식들과 $|j=j_{\max}-2, m=j_{\max}-2>$ 의 규격화 조건식의 세 조건식으로부터 이 경우에 나타나는 세 개의 클렙시-고단 미지계수들을 구한다.

5) 이때도 3)단계에서와 마찬가지로 $j=j_{\max}-2$ 인 경우의 모든 $m<j_{\max}-2$ 경우에 대한 클렙시-고단 계수들을 $J_{-}=J_{1-}+J_{2-}$ 를 작용시켜서 구한다.

6) 다음 단계로 $j=j_{\max}-3$ 인 경우의 모든 클렙시-고단 계수들도 4)-5)단계에서와 마찬가지 방법으로 구하며, 이러한 과정을 $j=|j_1-j_2|$ 의 경우까지 수행하면 우리는 모든 클렙시-고단 계수들을 알게 된다.

참고로 여기서 홀수 단계에서 사용하는 내림연산자 적용의 경우 J_{-} 와 $J_{1-}+J_{2-}$ 를 각각 전체표현과 개별표현에 작용시켜 구한다. 예컨대 1)단계에서 $j=j_{\max}$ 인 경우 아래와 같이 전체표현을 클렙시-고단 계수들을 써서 개별표현으로 나타낸 후 각각 작용시키면 된다.

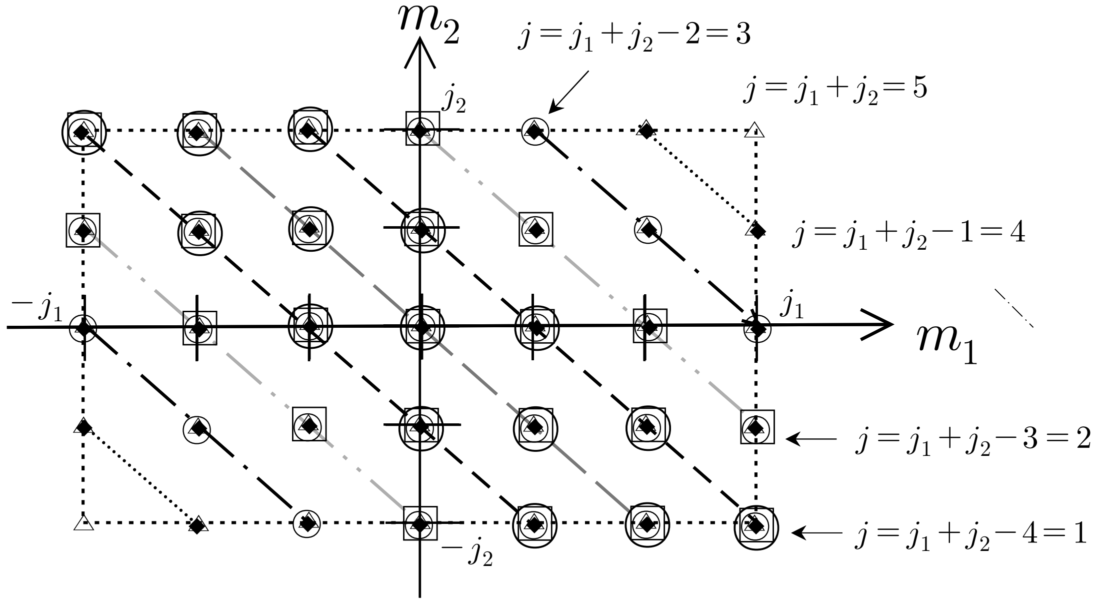
$$|\, j_1 j_2; j_{\max}, m> = \sum_{m_1, m_2 (m_1+m_2=m)} |j_1 j_2; m_1 m_2 >< j_1 j_2; m_1 m_2 |\, j_1 j_2; j_{\max}, m>$$

위에서 $j_{\max}=j_1+j_2$ 이고 $|m| \leq j_{\max}$ 이다. 그리고 짝수 단계에서의 직교조건식의 개수와 규격화 조건의 전체 개수는 항상 그 단계에서 클렙시-고단 미지계수들의 개수와 일치한다. 예컨대 2)단계에서 직교조건식과 규격화 조건식은 각각 아래와 같다.

$$< j_1 j_2; j=j_1+j_2-1, m=j_1+j_2-1 |\, j_1 j_2; j=j_1+j_2, m=j_1+j_2-1> = 0,$$

$$< j=j_1+j_2-1, m=j_1+j_2-1 | j=j_1+j_2-1, m=j_1+j_2-1> = 1.$$

이때 클렙시-고단 계수들은 $< m_1=j_1, m_2=j_2-1 |\, j=j_1+j_2-1, m=j_1+j_2-1>$ 와 $< m_1=j_1-1, m_2=j_2 |\, j=j_1+j_2-1, m=j_1+j_2-1>$ 의 2개이므로, 우리는 직교 조건식과 규격화 조건식의 두 조건식으로부터 두 개의 클렙시-고단 미지계수들을 구할 수 있다. 이처럼 직교조건들과 규격화 조건에 의한 조건식의 전체 개수와 클렙시-고단 미지계수들의 개수는 항상 같다. 이는 $j_1=3, j_2=2$ 인 경우에 전체 j 값과 m 값에 대한 관계를 그린 그림[8.4]에서도 확인할 수 있다. 이 경우 전체 각운동량 j 는 $j=3+2=5$ 에서 $j=|3-2|=1$ 사이의 값만 갖는다.



그림[8.4] $j_1=3, j_2=2$ 인 경우의 전체 j 값과 m 값 사이의 관계

그림[8.4]에서 △는 $j=j_1+j_2=5=j_{max}$ 에 속한 경우를, • 는 $j=4$ 에, 작은 ○는 $j=3$ 에, □는 $j=2$ 에, 큰 ○는 $j=1=j_{min}$ 에 속한 경우를 각각 나타낸다. 각 기호가 시작되는 경우에 전체 m 값은 각각 $m=5$, $m=4$, $m=3$, $m=2$, $m=1$ 으로, 이는 시작되는 기호가 갖는 j 값과 동일하다. 예컨대 $j=3$(작은 ○)이 시작되는 $m=3$ (　　) 의 경우, 클렙시-고단 계수의 개수는 3이며, 이 경우 직교 조건식은 $j=5$ 와 $j=3$, $j=4$ 와 $j=3$ 의 두 개이며, $|j=3, m=3>$ 자신에 대한 규격화 조건식이 있어 모두 3개의 조건식이 존재한다. 그러므로 우리는 클렙시-고단 미지계수 3개를 모두 구할 수 있다. 다른 경우도 클렙시-고단 미지계수들의 개수와 조건식의 개수가 일치함을 곧 확인할 수 있다.

• 위의 방법을 적용한 $j_1=j_2=1$ 인 경우의 클렙시-고단 계수들의 계산 예

여기서 우리는 $|j_1,j_2;j\,m> \equiv |j\,m>$ 과 $|j_1,j_2;m_1\,m_2> \equiv |m_1 m_2>$ 으로 전체 및 개별 각운동량 표시를 간소화하여 사용하겠다. $j_1=j_2=1$ 인 경우 $j_{max}=2, j_{min}=1$ 이므로 위의 방법 1)단계로 $|j=2, m=2>$ 에 J_- 를 적용하면 다음과 같다.

$$J_-|j=2,m=2> = (J_{1-}+J_{2-})|m_1=1,m_2=1> \\ = \sqrt{2}\hbar|m_1=0,m_2=1>+\sqrt{2}\hbar|m_1=1,m_2=0>$$

그런데 $J_-|j=2,m=2> = \sqrt{2}\hbar\,|j=2,m=1>$ 가 되므로, 다음 결과를 얻는다.

$$|j=2,m=1> = \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1=0,m_2=1>+\frac{1}{\sqrt{2}}|m_1=1,m_2=0>$$

이제 $|j=2,m=1>$ 에 다시 J_- 를 적용하면 다음과 같다.

$$J_-|j=2,m=1> = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sqrt{2}\hbar|m_1=-1,m_2=1> + \sqrt{2}\hbar|m_1=0,m_2=0> \\ + \sqrt{2}\hbar|m_1=0,m_2=0> + \sqrt{2}\hbar|m_1=1,m_2=-1>\Big)$$

그리고 $J_-|j=2,m=1> = \sqrt{6}\hbar\,|j=2,m=0>$ 이므로 다음 관계를 얻는다.

$$|j=2,m=0> = \frac{1}{\sqrt{6}}|m_1=-1,m_2=1> + \sqrt{\frac{2}{3}}|m_1=0,m_2=0> + \sqrt{\frac{1}{6}}|m_1=1,m_2=-1>$$

마찬가지로 J_- 를 $|j=2, m=0>$에 적용하면

$$\sqrt{6}\hbar|j=2,m=-1> = \frac{1}{\sqrt{3}}\hbar\big(2|m_1=-1,m_2=0> + |m_1=0,m_2=-1> + |m_1=-1,m_2=0> + 2|m_1=0,m_2=-1>\big)$$

이 되어, 다음 결과를 얻는다.

$$|j=2,m=-1> = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|m_1=-1,m_2=0> + |m_1=0,m_2=-1>\big)$$

끝으로 J_- 를 $|j=2,m=-1>$ 에 적용하면 다음 관계를 얻는다.

$$|j=2,m=-2> = |m_1=-1,m_2=-1>$$

이제 위에서의 방법 2)단계에 따라 직교 조건식을 적용하여 보자.

먼저 $|j=1,m=1>$ 인 상태에서는 $|m_1=1,m_2=0>$ 와 $|m_1=0,m_2=1>$ 의 두 상태가 가능하므로, 이 두 상태의 선형결합으로 아래와 같이 $|j=1,m=1>$ 을 표현하자.

$$|j=1,m=1> = a|m_1=1,m_2=0> + b|m_1=0,m_2=1>$$

이의 규격화 조건식 $<j=1,m=1|j=1,m=1> = 1$ 에서 $a^2+b^2=1$ 의 관계가 만족되어야 한다. 한편, 직교 조건식 $<j=2,m=1|j=1,m=1> = 0$ 으로부터 $\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = 0$ 의 관계가 만족되어야 하므로, 이 두 조건식으로부터 클렙시-고단 계수 a,b 는 $a=-b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 로 주어지고, 우리는 이로부터 다음의 결과를 얻는다.

$$|j=1,m=1> = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|m_1=1,m_2=0> - |m_1=0,m_2=1>\big)$$

이제 $j=2$ 의 경우에 J_- 를 작용시켜 앞에서 한 과정을 $j=1$ 의 경우에 다시 하면 다음의 결과를 얻는다. 먼저 $|j=1,m=1>$ 에 J_- 를 작용시키면,

$$\sqrt{2}\hbar|j=1,m=0> = \hbar\big(|m_1=1,m_2=-1> - |m_1=-1,m_2=1>\big)$$

이 되어 $|j=1,m=0> = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|m_1=1,m_2=-1> - |m_1=-1,m_2=1>\big)$ 을 얻는다.

다시 동일한 과정을 $|j=1,m=0>$ 에 반복하면,

$$|j=1,m=-1> = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|m_1=0,m_2=-1> - |m_1=-1,m_2=0>\big)$$

을 얻는다.

마지막으로 $|j=0,m=0>$ 인 상태는 $|m_1=1,m_2=-1>$ 과 $|m_1=0,m_2=0>$ 그리고 $|m_1=-1,m_2=1>$ 의 세 가지 상태가 가능하므로, 이 상태들의 선형결합으로 표현한다.

$$|j=0,m=0> = c|m_1=1,m_2=-1> + d|m_1=0,m_2=0> + f|m_1=-1,m_2=1>$$

그러면 규격화 조건 $<j=0,m=0|j=0,m=0> = 1$ 에서 $c^2+d^2+f^2=1$ 의 조건식을 얻는다. 다음으로 우리는 두 개의 직교 조건식을 가진다. 먼저 $j=2$ 와 $j=0$ 의 직교 조건식, $<j=2,m=0|j=0,m=0> = 0$ 으로부터 $\frac{c}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{2}{3}}d + \frac{f}{\sqrt{6}} = 0$ 의 조건식을 얻는다.

그리고 $j=1$ 과 $j=0$ 의 직교 조건식, $<j=1,m=0|j=0,m=0> = 0$ 으로부터 $\frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{f}{\sqrt{2}} = 0$ 의 조건식을 얻는다. 이 3개의 조건식으로부터 클렙시-고단 계수들을 모두 구하면 다음과 같다.

$$c = f = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad d = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

이로부터 $|j=0, m=0>$ 상태는 최종적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$|j=0, m=0> = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|m_1=1, m_2=-1> - |m_1=0, m_2=0> + |m_1=-1, m_2=1>\right)$$